Der empirische Zugang zu mathematischen Inhalten

Heinz Christian Ohlendorf

«Jede Primzahl (über 3) ist in der Form 6n + 1 oder 6n – 1 darstellbar (n = 1, 2, 3, …).» Oder, anschaulicher ausgedrückt: Jede Primzahl (über 3) hat in der natürlichen Zahlenfolge einen durch 6 teilbaren Nachbarn. Dieser kleine, aber doch überraschende Satz aus der Zahlenlehre mag uns als Beispiel dienen, um einmal zu beobachten, mit welchen Mitteln wir uns Einsicht und Gewissheit verschaffen bei einer mathematischen Aussage, die ja durch das Wort «jede» über unendlich viele Zahlen etwas zu sagen beansprucht. Ein bloßes Durchmustern aller angesprochenen Zahlen kommt demnach nicht in Frage, wir könnten mit dieser Arbeit nie fertig werden. Wir sprechen, wenn wir einen solchen Satz zur Zahlenlehre formulieren, gewissermaßen auf einem Niveau, das oberhalb der einfachen Beschreibung von unmittelbar festgestellten Tatsachen, Rechenergebnissen usw. liegt, wie z. B. «9 ist das Quadrat von 3». Solche Aussagen wie unser Lehrsatz sind also im Verhältnis dazu in einem bestimmten Sinn *transzendente* Aussagen.

Wir wollen zu diesem kleinen Lehrsatz keinen formalen Beweis vorführen, sondern uns durch bloßes «fragendes Umherschauen» im Raum der natürlichen Zahlen nach und nach von der Richtigkeit der Aussage überzeugen. Dann wollen wir die angewandte Methode einer sorgfältigen Betrachtung unterziehen.

Wir schreiben uns ein Stück der Folge der natürlichen Zahlen hin, z.B.:
… 40, *41,* **42,** *43,* 44, 45, 46, *47,* **48,** 49, 50, …
die Primzahlen sind kursiv: *41, 43* und *47.* Man sieht, dass jede von ihnen tatsächlich einen durch 6 teilbaren Nachbarn besitzt (fett gedruckt). Für 47 ist es der rechte Nachbar, die 48, und für 41 und 43 beides Mal die 42, einmal als rechter, einmal als linker Nachbar. Wir können aber nicht unmittelbar einsehen, *warum* das so ist.

Wie die Primzahlen verteilt sind, ist, wie man weiß, eine ziemlich rätselhafte Angelegenheit; dagegen ist ganz leicht zu durchschauen, wie die durch 6 teilbaren Zahlen verteilt sind. Man braucht sich nur mit dieser Frage noch einmal die Folge der natürlichen Zahlen anzuschauen, z.B. unser Stück von 40 bis 50:
… **40,** 41, ***42,*** 43, **44,** *45,* **46,** 47, ***48,*** 49, **50,** *51,* …

Die geraden Zahlen sind jetzt fett gedruckt, die durch 3 teilbaren dagegen kursiv. Die Teilbarkeit durch 2 erzeugt Zahlenpaare, die durch 3 erzeugt Zahlentripel. Durch 6 teilbare Zahlen stehen dort, wo gerade Zahlen auch noch durch 3 teilbar sind, wo also beide Eigenschaften zusammen auftreten. Der Satz: «Eine durch 3 teilbare gerade Zahl ist durch 6 teilbar» wird so evident.

Betrachten wir nun die beiden Nachbarn einer Primzahl, z.B. der 41, so fällt ins Auge, dass sie beide durch 2 teilbar, also gerade Zahlen sind. Könnte das auch einmal anders sein? Nein, es ist ja jede zweite Zahl eine gerade - dazwischen liegen die ungeraden. Alle Primzahlen sind aber ungerade, sonst wären sie ja durch 2 teilbar und keine Primzahlen mehr. Wir sehen also, beide Nachbarn einer jeden Primzahl sind gerade Zahlen. Entsprechend steht an jeder dritten Stelle eine durch 3 teilbare Zahl, dazwischen stehen jeweils zwei, die nicht durch 3 teilbar sind:
… 40, 41, **42,** 43, 44, **45,** 46, 47, **48,** 49, 50, **51,** …

Das bedeutet nun: Greift man eine Primzahl heraus, z. B. die 43, so bildet sie mit ihrem rechten und linken Nachbarn eine Dreiergruppe, von der eine Zahl durch 3 teilbar sein muss. Die Primzahl selber ist es ja gewiss nicht, also muss es einer der beiden Nachbarn sein. Kürzer gesagt, eine Primzahl hat immer *einen* durch 3 teilbaren Nachbarn, entweder links oder rechts. Hat man diese beiden Tatsachen entdeckt:

– beide Nachbarn einer Primzahl sind *gerade,* d.h. durch 2 teilbar; und
– ein Nachbar einer Primzahl ist *durch 3 teilbar,*

dann ist zu sehen, dass eben dieser Nachbar auch durch 6 teilbar sein wird. Damit ist die Begründung unseres Satzes genügend erhellt.

Die Beschreibung dieser allmählichen «Entdeckung» ist sehr breit formuliert, für den mathematisch Geübten sicher unnötig breit. Es kann trotzdem sein, dass die seelischen Tätigkeiten, die wir dazu angestrengt haben, nicht deutlich genug herausgekommen sind. Es ist auch wohl so, dass jeder Mensch ein wenig anders vorgeht, auf etwas andere Weise zu dem Erlebnis der Evidenz eines Schrittes oder des Ganzen kommt und sich vielleicht nicht gerne vorschreiben lässt, wie er schrittweise vorgehen soll – er hätte es, auf sich allein gestellt, eben doch anders gemacht. Und nur wenn er auf seine ganz eigene Weise zu einer Einsicht vordringt, kann er das beobachten, um was es uns hier geht. Das soll uns aber nicht abschrecken, den hier beschriebenen Weg nach Hauptschritten abzusuchen, da diese auch bei einem etwas anderen Vorgehen ihre Bedeutung behalten.

Das erste, was wir getan haben, war offenbar, sich konkret an einigen Stellen davon zu überzeugen, dass wir den Inhalt, die Behauptung des Satzes, richtig verstanden haben und dass tatsächlich die durch 6 teilbaren Nachbarn aufzufinden sind. Dabei haben wir eine ganze Anzahl von bekannten Vorstellungen, Begriffen, Zusammenhängen wachgerufen, die uns den Umgang mit den Zahlen überhaupt erst ermöglichen, die uns nämlich gestatten, uns verständig und sachgerecht in dem angesprochenen Gebiet zu bewegen. Ich kann Zahlen lesen, ihre Bedeutung, Größe, Reihenfolge verstehen, kenne das Einmaleins, weiß mit Primteilern umzugehen, überhaupt mit Teilbarkeit, kenne Primzahlen usw. Das meiste von dem Genannten habe ich mir schon in der Kindheit angeeignet. Es ist längst mein eigenes Reich geworden, wie eine Wohnung, in der ich lebe und herumgehe, ohne vor jeder Tür, die