# Geometrie zwischen Wahrnehmen und Denken und die Rolle der Axiomatik

*Peter Baum*

Die folgenden Betrachtungen setzen bei den Lesenden keine besonderen Kenntnisse der Geometrie voraus. Sie erfordern lediglich die Bereitschaft, sich auf unbefangene Beobachtung der eigenen Erlebnisse einzulassen. Und vielleicht ein wenig philosophische Neugier, was man denn über den Zusammenhang der drei Begriffe Wahrnehmen, Denken und Geometrie ausmachen kann.

Anlass für diese Betrachtung ist der scheinbare Widerspruch in folgendem Gedanken:

In unserer Vorstellung gibt es zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P genau eine Gerade, die durch P verläuft und zu g parallel ist.

Dies ist andererseits nicht beweisbar, d.h. vielleicht gibt es doch mindestens zwei Geraden, die durch P gehen und parallel zu g verlaufen.

Wie kommt es zu diesem Widerspruch, der mit dem 5. Postulat von Euklid, dem so genannten Parallelenaxiom, zusammenhängt? Um dieser Frage nachzugehen, werden zunächst Erfahrungen des Wahrnehmens und Denkens betrachtet.

## *Wahrnehmen, Denken und Vorstellen*

Sinneswahrnehmungen sind alltägliche Erfahrungen eines jeden Menschen. Jemand sitzt vielleicht irgendwo am Meeresstrand, sieht die Wellen heranrollen, hört ihr rhythmisches Rauschen, hört auch das etwas weniger rhythmische Rauschen des Windes, spürt die Sonnenwärme auf der Haut und die Abkühlung durch den Wind.

Alles scheint ihm von außen entgegenzukommen. Aber es hängt doch von seiner Aktivität ab, welchen Sinneseindruck er gerade wahrnimmt. In dem Wort Sinneseindruck wird betont, dass etwas da sein muss, was einen Eindruck macht. In dem Wort wahrnehmen steckt das Nehmen, er nimmt also etwas, dies beschreibt die aktive Seite des Menschen bei dem beschriebenen Vorgang. Diese Sinnesaktivität kann sowohl unabsichtlich – ich vermeide den Ausdruck unbewusst – als auch absichtlich geschehen. Meistens ist sie unabsichtlich. Gerade am Strand schweift man von einem Sinneseindruck zum anderen, ohne Ziel, dabei stellen sich Vorstellungen und Ge-

danken ein, die kommen und gehen, ohne dass man dieses Kommen und Gehen beeinflussen will. Aber manchmal ist es so, dass irgend etwas an dem Panorama der Sinneseindrücke das Interesse oder die Neugier des Menschen – ja, man müsste sagen: erregt, erzeugt, auf sich lenkt, findet – wie auch immer: Hier waltet ein gedankliches Element, welches die Sinneswahrnehmungen untereinander oder mit einer Erinnerung in Beziehung bringt. Oft ist es ja so, dass einem vieles «durch den Kopf» geht, wenn man sich mit ein wenig Muße in der Landschaft befindet. Und so kann plötzlich eine Frage an das Wahrgenommene entstehen. Dann geht man mit einer Absicht an die Sache heran, schaut zielgerichtet genauer hin oder lenkt seine Aufmerksamkeit auf ein bestimmtes Geräusch.

Geistig regsame Menschen kreisen mit ihren Gedanken um ein Thema. Der Dichter verarbeitet das Wahrgenommene in einem Gedicht, welches eine bestimmte Seite des Ganzen aufzeigt, der Forscher ist auf der Suche nach Naturgesetzen und ihren Beziehungen, kurzum: beide denken. Das Denken hängt eng zusammen mit der Fähigkeit, sich zu erinnern; man ergreift die Erinnerung an Sinneswahrnehmungen oder an Gedachtes und nennt dies dann Vorstellung.

*Die Grundelemente der Geometrie*

Wie ordnet sich nun die Geometrie in diese Tätigkeiten ein? Kann man geometrische Elemente – einen Punkt, eine Gerade, einen Kreis, eine Ebene – wahrnehmen? Wenn wir uns in der Natur umsehen, suchen wir solche Elemente vergeblich. Die Sterne am Himmel sind Punkten schon recht ähnlich, aber zu ihnen gehören eben auch feine, kurze Strahlen, solche hat ein Punkt nicht.[1] Die spiegelglatte Oberfläche eines Sees bei absoluter Windstille könnte, von der Erdkrümmung abgesehen, das Stück einer Ebene sein – aber dann sieht man sie gar nicht, sondern nur die Wolken oder die Bäume am Ufer, die sich in ihm spiegeln. Werfen wir einen Stein ins stille Wasser, sehen wir allerdings schöne, sich rasch vergrößernde Kreise. Das Watt ist keineswegs eben, sondern vielfältig geriffelt, von den Häufchen der Wattwürmer ganz zu schweigen. Immerhin kommt der Meereshorizont einer Geraden schon sehr nahe oder die Lichtstrahlen der Sonne, wenn diese durch ein Wolkenloch in eine etwas neblige Waldlichtung scheint.

Geraden und Ebenen sieht man fast nur an von Menschen gemachten Gegenständen: die Häuserkanten, der Fußboden, die Wände eines Raumes usw. Woher hat man aber die Gewissheit, dass es sich um eine Gerade handelt? Doch nur dadurch, dass man die Gerade als Idee in sich trägt. Ebenso ist es beim Punkt, bei der Ebene und beim Kreis. Diese geometrischen Elemente sind *Gedankendinge;* man kann sie aber immerhin als Vorstellung erzeugen, jedoch niemals in Gänze – eine Gerade erstreckt sich nach beiden Seiten unendlich weit, eine Ebene ist nach allen Seiten unbegrenzt, ein Punkt ist unendlich dünn und klein – und das kann man sich «eigentlich» nicht vorstellen.

1 Georg Maier machte mich darauf aufmerksam, dass die Abbildung eines Sterns wesentlich von dem abbildenden Medium beeinflusst wird (Auge, Linsensystem). Für die Astronomen sind die Fixsterne Punkte.