Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien und ihre Folgen; Bemerkungen zur Bewußtseinsgeschichte des 19. Jahrhunderts

Renatus Ziegler

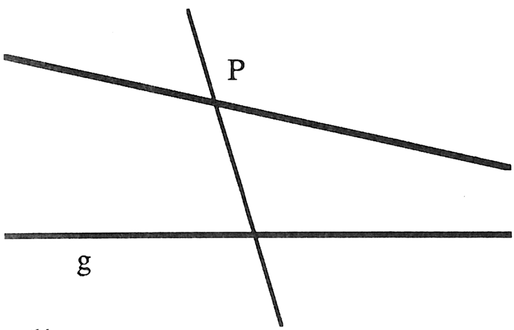
1. Einleitung

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie gilt mit Recht als eine der einflußreichsten Errungenschaften des 19. Jahrhunderts. Die von ihr ausgehende Umgestaltung der Mathematik und schließlich der mathematischen Physik hatte tiefgehende Folgen für die Entwicklung des Weltbildes des Naturwissenschaftlers und Philosophen. Sogar die Künstler waren davon betroffen und inspiriert (siehe *Henderson*, 1983). Im vorliegenden Aufsatz möchte ich eine Facette aus diesem umfangreichen Komplex von sich ineinander verschlingenden und gegenseitig beeinflussenden Entwicklungsströmungen herausgreifen, die bewußtseinsgeschichtlich besonders aufschlußreich ist. Es handelt sich um die Bedeutung der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie für die Entwicklung des philosophischen Selbstverständnisses der mathematischen Methode in den Naturwissenschaften.

Gegen das Ende der Aufklärung hatten diejenigen Naturwissenschaftler die Oberhand gewonnen, die in der Mathematik das Vorbild aller Wissenschaftlichkeit erblickten. Ihre Impulse flossen hauptsächlich in den Lehrbetrieb der École Polytechnique in Paris und andere sich an diesem Vorbild orientierenden höheren Schulen ein. Unter mathematischer Methode (sofern sie überhaupt in Betracht gezogen wurde) verstand man zunächst aber nicht allein die *Anwendung* mathematischer *Inhalte*, sondern durchaus auch ein allgemeines methodisches Prinzip naturwissenschaftlicher Erkenntnis, gemäß welchem sich die Gestalt einzelner Disziplinen der Naturwissenschaften an dem strengen Aufbau der Mathematik (insbesondere der euklidischen Geometrie) orientieren sollten. Aus verschiedenen Gründen setzt sich aber im Laufe des 19. Jahrhunderts die Auffassung durch, daß mit «mathematischer Methode» nur die Beschreibung empirischer Tatsachenzusammenhänge durch mathematische Inhalte (theoretische Modelle) gemeint sein kann, eine Auffassung, die zum bestimmenden Faktor der Weiterentwicklung der Naturwissenschaften werden sollte und bis heute entscheidend geblieben ist. In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, in welchem Maße und auf welche Weise die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie für diese Entwicklung verantwortlich ist. Das Durchschauen der Wurzeln dieses entscheidenden Bewußtseinsumschwunges um die Mitte des 19. Jahrhunderts eröffnet zugleich einen konkreten Einblick in die bewußtseinserziehende Kraft des mathematischen Denkens, das, wenn geeignet beherrscht und geführt, zu einer Überwindung der Einseitigkeiten der mathematischen Methode in den Naturwissenschaften und damit zu Perspektiven für ein erneuertes Selbstverständnis der mathematischen Physik sowie der mathematischen Organik führen kann.

2. *Euklids* Elemente *und die Folgen*

Ohne Euklid keine nichteuklidische Geometrie! Euklid hat als erster die Sonderstellung der nach ihm benannten Geometrie erkannt. Wir wissen zwar heute, daß Euklid in seinen *Elementen* (ca. 300 v. Chr.) im wesentlichen «nur» die Ergebnisse seiner Vorläufer und Zeitgenossen zusammenfaßte und in ein Lehrbuch schmolz, das sich als erfolgreichstes mathematisches Buch aller Zeiten erweisen sollte und in der Anzahl der Auflagen sowie der kulturellen und geographischen Verbreitung nur von der Bibel übertroffen wurde. Obwohl man natürlich als Mathematiker des 20. Jahrhunderts manches gegen Einzelheiten des euklidischen Systems einzuwenden hat, waren die *Elemente* doch für gut zweitausend Jahre *das* Vorbild an mathematischer Strenge und Klarheit. Was Euklid wahrhaft unsterblich macht, ist seine geradezu prophetische Klarsicht in der Auswahl der expliziten Voraussetzungen «seiner» Wissenschaft, der Geometrie. Er demonstriert (zumindest bis zu einem gewissen Grade), daß die Geometrie auf bestimmten unbeweisbaren, durch sich selbst einsichtigen Annahmen, von ihm Definitionen und Postulate (oder Axiome) genannt, beruht, von denen alles weitere durch reines logisches Schließen ableitbar ist. Natürlich ist Euklids Axiomensystem weder vollständig, unabhängig, noch frei von zirkulären Definitionen. Das sind aber Kleinigkeiten, wenn man berücksichtigt, daß es sich um den ersten derartigen im Detail ausgeführten Versuch handelt. Euklids Genius offenbart sich nun in der Tatsache, daß er eine geometrische Aussage als Postulat (oder Axiom) voranstellt, die weder einfach noch so ohne weiteres intuitiv selbstverständlich ist, wie man das sonst von den Postulaten erwartet (siehe *Bild 1*):



Postulat 5:
Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Bild 1