Raum und Metamorphose. Die lebendige Raumauffassung in der projektiven Geometrie Teil 2[1]

Christina Moratschke

Zusammenfassung

Bei perspektivischen Darstellungen können Fluchtpunkte und Horizont als Bilder unendlich ferner Punkte und Geraden aufgefasst werden. Die Projektivität ist eine Verallgemeinerung der Gesetzmässigkeiten der Perspektive. Durch die Projektivität lassen sich z.B. alle Punkte einer Punktreihe eindeutig den Punkten einer zweiten Punktreihe zuordnen. Mit Hilfe dieser Zuordnung kann man Kegelschnitte konstruieren. Es entstehen also, ausgehend von einfachen Projektionen, gebogene Formen. Im Sinne der im ersten Teil entwickelten Raumauffassung bewegt man sich damit in der zweiten Dimension. Durch Spiegelung am Kreis (und auch an anderen Kegelschnitten) kann man zu jeder (auch gebogenen) Form in der Ebene eine polare Gegenform konstruieren. Dies führt auf das Verhältnis von Raum und Gegenraum. Auch der Gegenraum kann in einem dreistufigen Erkenntnisvorgang erfasst werden. Der Zusammenhang von Form und Gegenform kann sich beim Betreten der dritten Erkenntnisstufe oder Dimension zeigen. Die Idee des Raumes, durch diesen doppelt dreistufigen Erkenntnisweg erblickt, bildet in umgestülpt gespiegelter Form den Weg ab, den der Mensch zwischen dem Tod und einer neuen Geburt zurücklegt.

Summary

The vanishing points and the vanishing line of perspective constructions can be interpreted as images of infinite elements. Projectivity is a generalization of the principles of perspectivity. Thus all points of a line can be clearly assigned to the points of another line. With the help of this assignment conic sections can be constructed. Curved forms come into existence out of the fundamental elements point, line and plane. This process corresponds to the second dimension of the space which has been outlined in the first part of this article (Elemente d. Naturwissenschaft Nr. 105, S. 5 ff.) as three distinct levels of knowledge. With the help of a circle or other conic sections forms can be mirrored that are polar to each other. This can lead to the concept of counterspace in its relation to space. As with space, there are also three dimensions of counterspace that can be understood as three levels of knowledge. The relation of form and polar form reveals itself from the point of entering the third dimension or level of knowledge. Seen from this

1 Die beiden Teile des Artikels sind eine überarbeitete Kurzfassung einer längeren Abhandlung, die unter dem Titel «Projektivität und Raum. Ein geometrisch-philosophisches Experiment» in der Zeitschrift «Jupiter» der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, Ausgabe März 2015, erschienen ist.

twofold path leading to three levels of knowledge, the idea of space represents as an inverted mirror the path in the spiritual world from human death to a new life.

Perspektivität und Projektivität

Im ersten Teil des Aufsatzes wurde herausgearbeitet, wie sich der Raum in einem dreistufigen Erkenntnisweg erschliessen kann. Im Folgenden werden einige Bezüge der projektiven Geometrie zu dieser Raumauffassung im Einzelnen dargestellt. Die projektive Geometrie ist verknüpft mit den Gesetzmässigkeiten der Perspektive, wie sie dem menschlichen Sehen entsprechen und auch in der Projektion z.B. eines Dias auf eine Leinwand gelten. Man kann die Projektivität gut als Verallgemeinerung dieser Gesetzmässigkeiten erläutern, sie hat aber darüber hinaus eine eigenständige Bedeutung, die den Regeln, die für die Zentralperspektive gültig sind, nochmals übergeordnet ist. Die Abb. 1 zeigt eine einfache Möglichkeit, unter Zuhilfenahme paralleler Geraden eine Parabel zu konstruieren.[2]

Die Punkte A, B und C haben offensichtlich gleichen Abstand, der Punkt B halbiert den Abstand zwischen A und C genau. Die Parallelen bieten einen Anhaltspunkt dafür, wie die Geraden liegen, die die Parabel einhüllen. Deren Schnittpunkt ist der gemeinsame Fernpunkt. Die drei angegebenen Punkte liegen harmonisch in Bezug auf diesen Fernpunkt. Sie bilden mit dem Fernpunkt zusammen einen sogenannten harmonischen Punktwurf. Das Kriterium für die harmonische Lage von 4 Punkten ist die Gleichheit der Abstandsverhältnisse: die Strecke von A nach B im Verhältnis zur Strecke von B nach C ist gleich dem Verhältnis der Strecke von A zum Fernpunkt (Punkt D) zur Strecke C zum Fernpunkt. Für die harmonische Lage müssen also grundsätzlich nicht, wie es hier im Bild der Fall ist, einzelne Strecken einander gleich sein, sondern nur die Streckenverhältnisse. Für den vorliegenden Fall ist es wichtig, sich zu verdeutlichen, dass jeder im Endlichen liegende Punkt von dem Fernpunkt der Geraden, auf welcher er liegt, gleiche Entfernung hat. Die beiden Strecken AB und BC sind, wie gesagt, gleich gross und dasselbe gilt für die beiden Strecken AD (Fernpunkt, nicht sichtbar) und CD, so dass sich in diesem Fall ein Streckenverhältnis von 1 zu 1 ergibt. In Abb. 2 ist eine entsprechende Parabel gezeichnet, allerdings ist der Fernpunkt jetzt sozusagen in die Sichtbarkeit gerückt. Er stellt den Fluchtpunkt dar, in dem sich die Parallelen des vorhergehenden Bildes schneiden. Das Eindrückliche ist nun, dass die Punkte A, B, C und D ebenfalls einen harmonischen Punktwurf bilden. Wiederum ist das Verhältnis der Strecke von A nach B zu der

2 Entsprechende Zeichnungen und viele andere Anregungen zur Perspektive findet man z.B. bei *Baravalle* 1952.