Die Gleichnissprache der Mathematik

Gerhard Kowol

Summary

In modern science the opinion predominates that the sensible reality can be explained by means of smallest components (elementary particles, genes). *Goethe*'s view is quite opposite. He says that the simple and imperfect elements can only be understood by looking at the composed and perfect objects. But the stupendous results of modern science make it difficult to argue in his direction. An analogous problem can be found within mathematics, if one looks at the axiomatics of Euclidean geometry. Up to the end of the last century, the basic elements always have been points, lines and planes, but in modern times these have been reduced to points alone. Since the mathematical theory itself does not differ in any way, it seems that the second view is preferable according to the minimum principle. But if one takes a superior point of view, which in this case means to pass over to projective geometry, it becomes clear that this opinion is wrong.

Betrachtet man auch nur ein wenig die Forschung in den Naturwissenschaften der letzten Jahre und Jahrzehnte, so ist eine Tendenz zum extremsten mikroskopischen Bereich unübersehbar. So suchen beispielsweise die Physiker nach immer noch kleineren Teilchen, die letztlich die materielle Welt aufbauen und deren Eigenschaften erklären sollen. Die Biowissenschaften und die Medizin wiederum sind auf der Jagd nach den Genen, die sämtliches Leben steuern und für dessen vielfältige Ausprägungen verantwortlich sein sollen. Durchgängig scheint es zum Ideal geworden zu sein, kleinste Bausteine – die durchwegs nicht-sinnlicher Natur sind – aufzufinden und daraus das Gegebene vollständig zu erklären.

Ganz konträr dazu steht *Goethes* Ansicht. «Nicht das Zusammengesetzte wollte er durch das Einfache erklären, sondern jenes mit einem Blick als wirkendes Ganzes überschauen und dann das Einfache und Unvollkommene als einseitige Ausbildung des Zusammengesetzten und Vollkommenen erklären», so beschreibt sie *Rudolf Steiner* in «Goethes Weltanschauung» (*Steiner*, 1979, S. 106). Zwar wird in den Wissenschaften auch schon der Ruf nach dem einigenden geistigen Band immer vernehmlicher, doch vergrößern zugleich die unübersehbaren «Erfolge» der auf das Kleinste zielenden Denkweise in rasantem Tempo die Kluft zwischen beiden Forschungs- bzw. Anschauungsweisen. Von den Quarzuhren über die Mikrowellenherde bis zur gentechnisch geschaffenen 14äugigen Fruchtfliege scheinen die Anwendungen zu bestätigen, daß die heutige Wissenschaftsauffassung die einzig berechtigte ist. Und als Goetheanist kommt man leicht in Argumentationsnöte, will man gegenüber diesem Bombardement von Erfolgen seine Meinung behaupten.

Wie so oft, wenn man sich ganz intim in sie einlebt, kann auch hier die *Mathematik* helfen, diese Problematik klarer zu durchschauen. Und zwar anhand eines ganz elementaren Sachverhalts, der noch dazu weithin bekannt sein dürfte. Daß gerade die Mathematik diesbezüglich einen erhellenden Beitrag leisten kann, ist überaus erstaunlich, war sie es doch, welche schon vor mehr als 2000 Jahren die Sinnhaftigkeit einer Denkweise aufzeigte, die der heute in den Naturwissenschaften herrschenden völlig analog ist. Die «Elemente» des *Euklid* behandeln ja die Geometrie (und zum Teil auch die Arithmetik) erstmals konsequent deduktiv; das heißt, daß gewisse «kleinste» Bausteine, nämlich Punkt und Gerade, als Ausgangspunkt genommen werden, mit ihrer Hilfe gewisse weitere geometrische Gebilde wie Winkel, Kreis, Dreieck definiert und sodann eine Vielfalt von sie betreffenden Sätzen mittels Verwendung sogenannter Axiome in logischer Aufeinanderfolge bewiesen werden. «Diese Bedächtlichkeit, nur das Nächste ans Nächste zu reihen, oder vielmehr das Nächste aus dem Nächsten zu folgern» (*Goethe*, 1887, S. 19) wurde nicht nur für *Goethe* zum Vorbild eines wirklichkeitserfassenden Denkens, es bildete ganz allgemein das nachzuahmende und anzustrebende Musterbeispiel für jede echte Wissenschaft. Und dazu gehörte als wesentlicher Bestandteil, die Ausgangselemente, gewissermaßen die Atome der betreffenden Wissenschaft, aufzufinden und alles andere daraus zu erklären. Beispielsweise stellen in *Goethes* Farbenlehre Licht und Finsternis die Ausgangspunkte dar.

Dieser deduktiv-axiomatische Ansatz war jedoch nicht nur außerhalb der Mathematik wegleitend, auch innerhalb derselben wurde versucht, ihn für andere Teilgebiete fruchtbar zu machen. Aber erst in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wurden größere Fortschritte diesbezüglich erzielt, als nämlich die Gegenstände der Arithmetik, die reellen Zahlen, auf die natürlichen Zahlen als ihre logischen «Bausteine» zurückgeführt werden konnten. Bald danach gelang es G. *Peano*, auch diese noch «aufzubauen», indem er auf Mengen als Ausgangspunkt zurückgriff. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde es immer offenbarer, daß die Mengen nicht nur für die Arithmetik, sondern für die gesamte Mathematik das Fundament abgeben können, und heute lernt jeder Student diese Art von Grundlegung kennen.[1] Daß gerade bezüglich der Mengenlehre viele Fragen offen sind, soll nicht unerwähnt bleiben, doch führt diese Problematik vom Thema ab (vgl. dazu *Unger*, 1978) .

Wir wollen uns dagegen zum deduktiv-axiomatischen Aufbau der Geometrie zurückwenden und beschränken uns dabei auf die *ebene* euklidische Geometrie. Wie schon erwähnt, bilden bei *Euklid* Punkte und Geraden – genauer sind es bei ihm begrenzte, aber beliebig verlängerbare Strecken – die logischen Atome. Die entsprechenden Definitionen 1, 2 und 4 im ersten Buch der «Elemente» lauten (*Euklid*, 1933–37, S. 1):

1 Für Fachleute sei hinzugefügt, daß sich die gesamte Mathematik auch auf den Funktionsbegriff gründen läßt, wobei dann natürlich der Mengenbegriff ein abgeleiteter wird (siehe die mengentheoretischen Arbeiten von *John von Neumann* (1961)).